

# InstaLogik

## **Scenariusz dla nauczyciela na zajęcia matematyki, informatyki lub kółko przedmiotowe Zadania konkursu InstaLogik**

### **Świąteczka - I etap konkursu InstaLogik 2020/2021**

Zadania pierwszego etapu konkursu InstaLogik sformułowane są w formie prostych do zrozumienia historyjek. Ich celem jest skupienie myśli ucznia wokół schematów, które tworzą podstawy pod istotne pojęcia informatyczne.

Plan zajęć:

1. Rozwiązanie pierwszych zadań metodą bazującą na ręcznej symulacji poszczególnych wejść do budynku.
2. Rozwiązanie końcowych zadań przez znalezienie ogólnego modelu działania opisanej zabawy.
3. Przedstawienie systemu binarnego i pokazanie, że każde wejście do budynku w zabawie Jasia i Małgosi w świąteczka jest symulacją zwiększenia o jeden liczby reprezentowanej przez układ zapalonych światełek przed wejściem.

## Treść zadania

Jaś mieszka w bloku składającym się z dziesięciu kondygnacji: parteru i dziewięciu pięter, ponumerowanych od 1 do 9. Pewnego dnia, kiedy wracał do domu, jego uwagę zwróciły światła w oknach na klatce schodowej. Na każdej kondygnacji jest włącznik i jedna lampa. Pomyślał, że fajnie by było zmieniać układ zapalonych światel. I wtedy wymyślił zabawę.

Zabawa polega na wbieganiu do budynku i gaszeniu światel na kolejnych kondygnacjach, zaczynając od parteru, aż do pierwszej kondygnacji na której światło jest zgaszone. Na niej Jaś zapala światło i wybiega z budynku. Po wybiegnięciu, patrzy przez chwilę na układ zapalonych światel i powtarza zabawę, za każdym razem zaczynając od parteru. Jeśli światła palą się na wszystkich piętrach, to Jaś kończy zabawę.

Dla uproszczenia, mówiąc o świetle zapalonym na pewnym piętrze, mówimy zawsze o lampie na klatce schodowej na tym piętrze.

**Jaś wszedł do budynku tylko raz:**



Światła przed zabawą



Światła po zabawie

**Jaś wszedł do budynku trzy razy:**



Światła przed zabawą



Światła po zabawie

## Cel zadania

Zadanie Światelka bardzo dobrze prezentuje podstawowe zagadnienie programistyczne, jakim jest system binarny zapisu liczb. Jednak celem tego zadania nie jest przedstawienie systemu binarnego. Jego celem jest pokierowanie ucznia w stronę rozważań prowadzonych na modelu, które pozwolą zbudować głębsze rozumienie zależności w nim występujących. W szczególności istotą zadania jest analiza zmieniającego się stanu w czasie.

Drugim celem tego zadania, jak większości zadań konkursu InstaLogik, jest ćwiczenie logiki. Trudność zadania autorzy widzą przede wszystkim na poziomie precyzyjnej interpretacji pytań, pomimo tego, że pytania wyglądają podobnie i dotyczą tego samego modelu, to każde jest historią samą w sobie.

Oto kilka przykładów, rozważań, z którymi mierzyli się uczniowie:

Pytania, w których **podany był stan początkowy** wymagały prześledzenia **dalszej** części zabawy.

Pytania, w których **podany był stan końcowy** wymagały odtworzenia **wstecz** kroków zabawy.

Należało odróżnić informacje podane od informacji nie podanych – np.:

Światło pali się **tylko** na parterze, drugim i piątym piętrze. Tu wiemy, że na pozostałych piętrach światła są zgaszone.

**Jedynę co wiemy**, to że światło pali się na parterze, drugim i piątym piętrze. Tu nie wiemy nic o tym, w jakim stanie są światła na pozostałych piętrach, co oznacza, że może być dowolnie.

Należało odróżnić przypadki, kiedy wystarczy pokazać jeden stan, który spełnia warunki zadania od przypadku, w którym wszystkie możliwe stany zdefiniowane w zadaniu muszą spełniać podany warunek.

Światło na 3 piętrze **na pewno** jest zapalone. Wszystkie możliwe zdefiniowane w zadaniu stany muszą spełniać warunki zadania.

Światło na 3 piętrze **mogło** być zapalone. Wystarczy wskazać jeden możliwy zdefiniowany w zadaniu stan, który spełnia warunki zadania.

Jaś musiał wejść do budynku **co najmniej 10** razy jeśli na początku zabawy światło na 5 piętrze nie było zapalone.

Jeśli wszedł 13 razy, to odpowiedź będzie brzmiała PRAWDA, bo  $13 \geq 10$

Jeśli wszedł 15 razy, to odpowiedź będzie brzmiała FAŁSZ.





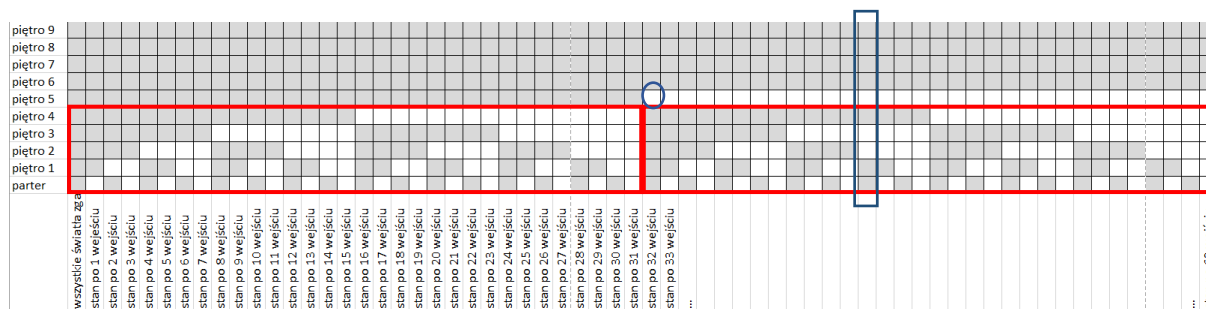


### Pytanie 3.3.

**Na koniec zabawy światła palą się tylko na piętrze drugim, trzecim i piątym.**

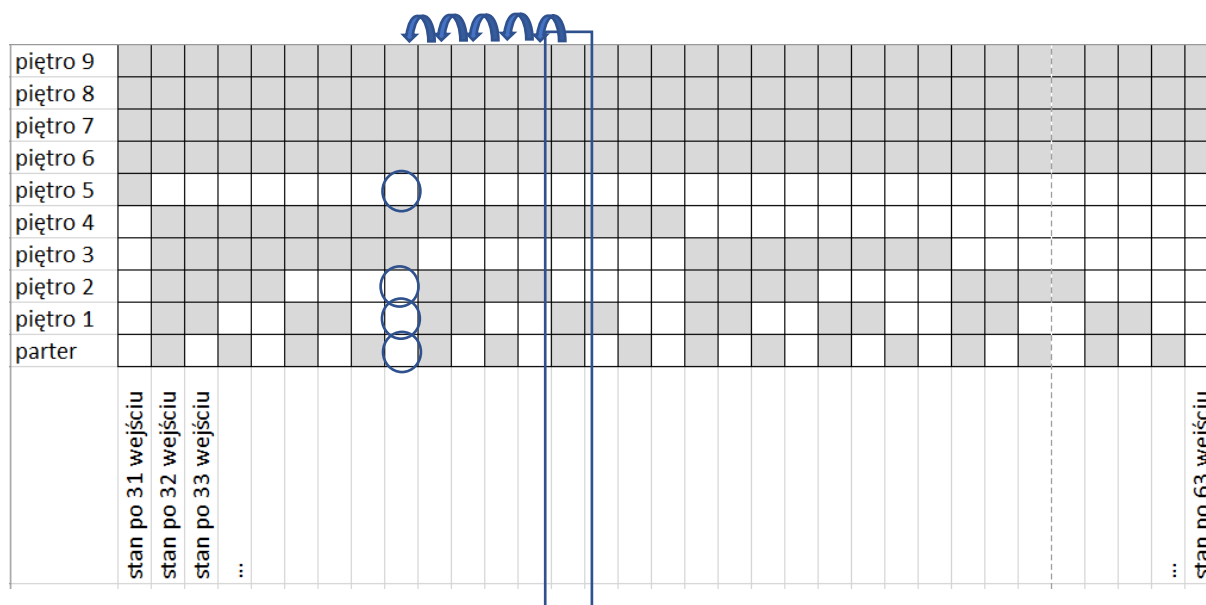
Popatrzmy na schemat zapalonych światełek. W momencie gdy zapali się po raz pierwszy światło na 5 piętrze (zaznaczone niebieskim kółkiem) powtórzy się cały schemat zapalania światełek od parteru do zgaśnięcia światła na 5 piętrze (schemat powtarzany zaznaczony jest czerwonym prostokątem).

Stan, w którym palą się światła tylko na piętrze drugim, trzecim i piątym zaznaczony jest niebieską ramką.



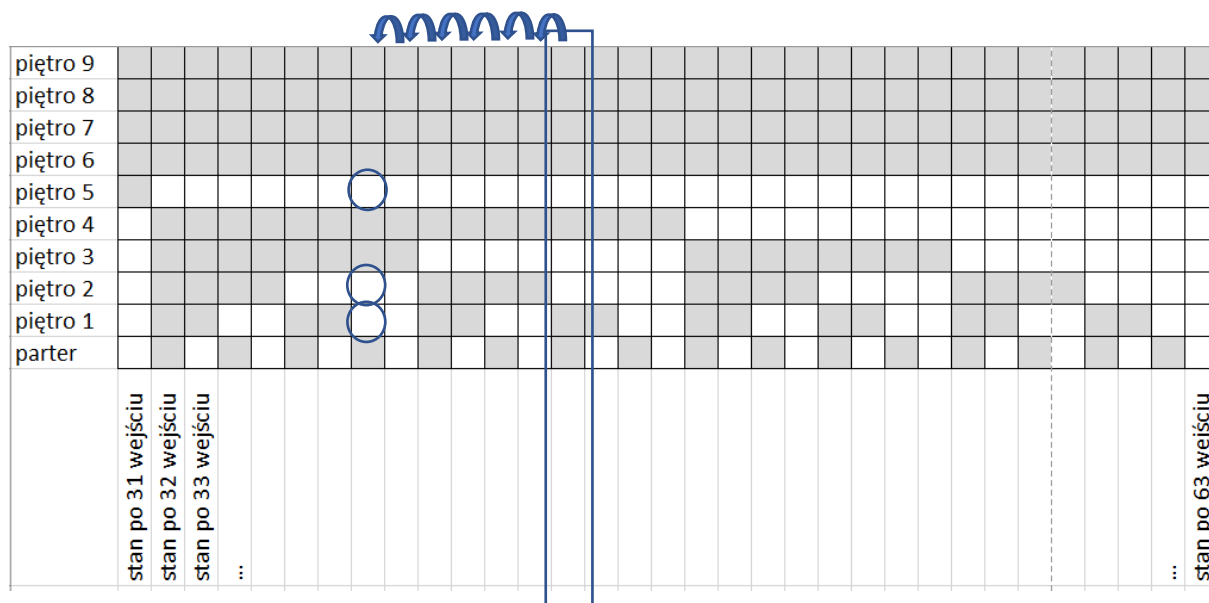
**3.3.1 Jeśli Jaś wszedł do budynku 5 razy, to na początku zabawy paliły się tylko światła na parterze oraz na drugim i piątym piętrze.**

**FAŁSZ.** Spójrz na rysunek – niebieską ramką oznaczony jest układ światełek na końcu zabawy (palą się światła tylko na drugim, trzecim i piątym piętrze). Jeśli Jaś wszedł do budynku 5 razy, to musimy cofnąć się o pięć wejść w stosunku do stanu końcowego. Pięć wejść wcześniej palą się światła na parterze, **pierwszym**, drugim i piątym piętrze.



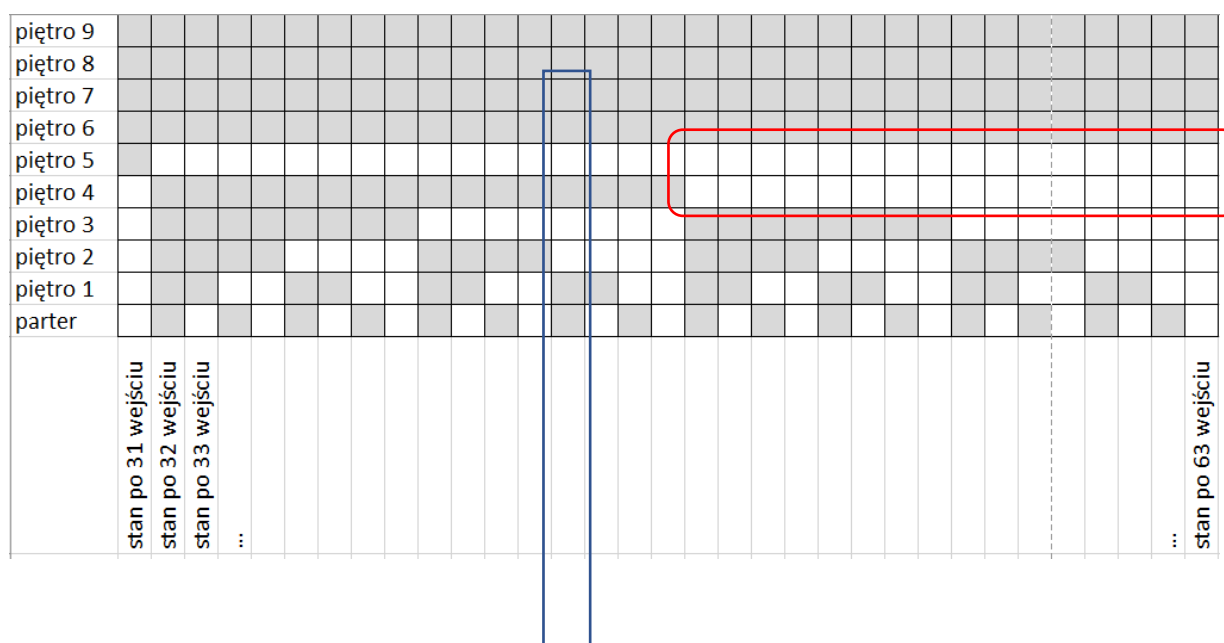
### 3.3.2 Jeśli Jaś wszedł do budynku 6 razy, to na początku zabawy paliły się tylko światła na pierwszym, drugim i piątym piętrze.

**PRAWDA.** Spójrz na rysunek – niebieską ramką oznaczony jest układ światełek na końcu zabawy (palą się światła tylko na drugim, trzecim i piątym piętrze). Jeśli Jaś wszedł do budynku 6 razy, to musimy cofnąć się o sześć wejść w stosunku do stanu końcowego. Sześć wejść wcześniej palą się światła na pierwszym, drugim i piątym piętrze.



### 3.3.3 Możliwe, że na początku zabawy paliły się jednocześnie światła na czwartym i piątym piętrze.

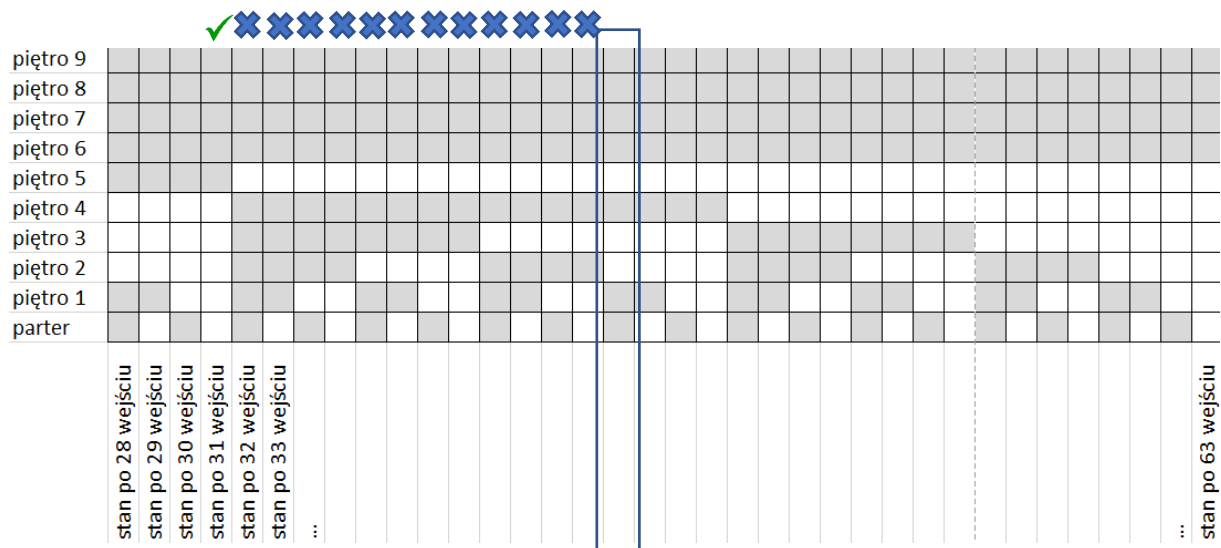
**FAŁSZ.** Spójrz na rysunek poniżej. Stany, w których palą się jednocześnie światła na 4 i 5 piętrze (oznaczone czerwoną ramką) znajdują się dalej niż stan końcowy zabawy Janka (oznaczony niebieską ramką).





### 3.3.4 Jaś musiał wejść do budynku co najmniej 13 razy, jeżeli na początku zabawy światło na piątym piętrze nie było zapalone.

**PRAWDA.** Spójrz na rysunek poniżej. Końcowy stan zabawy oznaczony jest niebieską ramką. Wszystkie wcześniejsze stany przed końcowym, które mają zapalone światło na 5 piętrze oznaczone są ✖. Jest ich 12, więc pierwszy możliwy początkowy stan zabawy, w którym nie paliło się światło na 5 piętrze był 13 wejść wcześniej (oznaczony jest zielonym ✔).





Dla przykładu wykonajmy obliczenia dla stanu: światło jest zapalone na 4 piętrze, na 3 piętrze, 1 piętrze i na parterze.

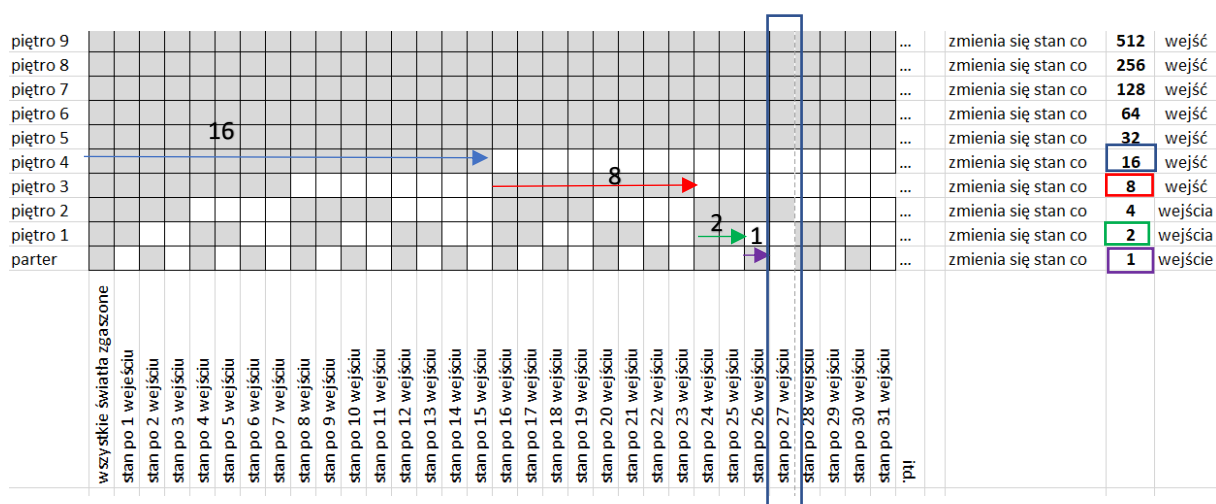
Najpierw dojdziemy do stanu, w którym zapalone jest światło na 4 piętrze. Musimy więc wejść do budynku 16 razy, aby światło na 4 piętrze zapaliło się po raz pierwszy (zaznaczone niebieską strzałką). Zauważmy, że światło pali się na 4 piętrze w stanach od 16-tego do 31-szego, więc jeszcze nie mamy odpowiedzi, który z tych stanów jest poszukiwanym.

Dalej idziemy do stanu, w którym dodatkowo pali się światło na 3 piętrze. Musimy się więc przesunąć o kolejne 8 wejść (zaznaczone czerwoną strzałką).

Dalej idziemy do stanu, w którym dodatkowo pali się światło na 1 piętrze. Musimy się więc przesunąć o kolejne 2 wejścia (zaznaczone zieloną strzałką).

Na końcu idziemy do stanu, w którym dodatkowo pali się światło na parterze. Przesuwamy się więc o kolejne 1 wejście (zaznaczone fioletową strzałką).

Razem przesunęliśmy się o  $16 + 8 + 2 + 1 = 27$  wejść. Interesujący nas stan oznaczony jest niebieską ramką. Zauważmy, że jest on podpisany rzeczywiście „stan po 27 wejściach”!



Stąd możemy wytworzyć ogólny model wyliczania po ilu wejściach do budynku począwszy od stanu wszystkich świateł zgaszonych otrzymamy konkretny stan. Sumujemy w tym celu liczby wejść potrzebnych by zapalić światła na poszczególnych piętrach, np. dla poniższego stanu:

|                      |                     |     |         |          |     |
|----------------------|---------------------|-----|---------|----------|-----|
| piętro 9             | zmienia się stan co | 512 | wejść   |          |     |
| piętro 8             | zmienia się stan co | 256 | wejść   | zapalone | 256 |
| piętro 7             | zmienia się stan co | 128 | wejść   |          |     |
| piętro 6             | zmienia się stan co | 64  | wejść   | zapalone | 64  |
| piętro 5             | zmienia się stan co | 32  | wejść   |          |     |
| piętro 4             | zmienia się stan co | 16  | wejść   | zapalone | 16  |
| piętro 3             | zmienia się stan co | 8   | wejść   | zapalone | 8   |
| piętro 2             | zmienia się stan co | 4   | wejścia |          |     |
| piętro 1             | zmienia się stan co | 2   | wejścia |          |     |
| parter               | zmienia się stan co | 1   | wejście | zapalone | 1   |
| łącznie liczba wejść |                     |     |         |          | 345 |

Zastanówmy się jak obliczyć liczbę wejść między podanymi dwoma stanami. W tym celu obliczamy liczbę wejść potrzebnych by otrzymać każdy ze stanów poczynawszy od stanu wszystkich świateł zgaszonych, a następnie odejmujemy je od siebie.

|          |                     |     |         | stan początkowy                                             |     | stan końcowy         |     |
|----------|---------------------|-----|---------|-------------------------------------------------------------|-----|----------------------|-----|
| piętro 9 | zmienia się stan co | 512 | wejść   |                                                             |     | zapalone             | 512 |
| piętro 8 | zmienia się stan co | 256 | wejść   | zapalone                                                    | 256 |                      |     |
| piętro 7 | zmienia się stan co | 128 | wejść   |                                                             |     |                      |     |
| piętro 6 | zmienia się stan co | 64  | wejść   | zapalone                                                    | 64  |                      |     |
| piętro 5 | zmienia się stan co | 32  | wejść   |                                                             |     |                      |     |
| piętro 4 | zmienia się stan co | 16  | wejść   | zapalone                                                    | 16  | zapalone             | 16  |
| piętro 3 | zmienia się stan co | 8   | wejść   | zapalone                                                    | 8   | zapalone             | 8   |
| piętro 2 | zmienia się stan co | 4   | wejścia |                                                             |     |                      |     |
| piętro 1 | zmienia się stan co | 2   | wejścia |                                                             |     | zapalone             | 2   |
| parter   | zmienia się stan co | 1   | wejście | zapalone                                                    | 1   |                      |     |
|          |                     |     |         | łącznie liczba wejść                                        | 345 | łącznie liczba wejść | 538 |
|          |                     |     |         | liczba wejść od stanu początkowego do końcowego $538-345 =$ |     |                      | 193 |

Potrafimy już obliczyć ile potrzeba wejść by uzyskać konkretny stan zapalonych i zgaszonych świateł. Sumujemy liczby reprezentujące zapalone piętra.

Potrafimy też obliczyć ile jest wejść między dwoma konkretnymi stanami. Liczymy różnicę pomiędzy liczbą potrzebnych wejść od stanu „0” do uzyskania tych stanów.

Jesteśmy już gotowi odpowiadać na dalsze pytania.

**Pytanie 3.4.**

Na końcu zabawy światła są zapalone tylko na trzecim, piątym i dziewiątym piętrze.

**3.4.1 Jeśli Jaś wszedł do budynku 500 razy, to zanim zaczął zabawę na czwartym piętrze było zapalone światło.**

Stan, w którym światła zapalone są na 3, 5 i 9 piętrze reprezentowany jest przez 552 wejścia, co obliczyliśmy na diagramie poniżej.

Jeśli stan reprezentowany przez 552 wejścia od stanu „0” Jaś osiągnął po 500 wejściach do budynku, to jego stan początkowy był  $552 - 500 = 52$  wejścia od stanu „0”.

|          |                     |     |                      | stan początkowy |   |                      | stan końcowy |    |
|----------|---------------------|-----|----------------------|-----------------|---|----------------------|--------------|----|
| piętro 9 | zmienia się stan co | 512 | wejść                |                 |   |                      | 512          |    |
| piętro 8 | zmienia się stan co | 256 | wejść                |                 |   |                      |              |    |
| piętro 7 | zmienia się stan co | 128 | wejść                |                 |   |                      |              |    |
| piętro 6 | zmienia się stan co | 64  | wejść                |                 |   |                      |              |    |
| piętro 5 | zmienia się stan co | 32  | wejść                |                 |   |                      | 32           |    |
| piętro 4 | zmienia się stan co | 16  | wejść                |                 |   |                      |              |    |
| piętro 3 | zmienia się stan co | 8   | wejść                |                 |   |                      | 8            |    |
| piętro 2 | zmienia się stan co | 4   | wejścia              |                 |   |                      |              |    |
| piętro 1 | zmienia się stan co | 2   | wejścia              |                 |   |                      |              |    |
| parter   | zmienia się stan co | 1   | wejście              |                 |   |                      |              |    |
|          |                     |     | łącznie liczba wejść | 52              |   | łącznie liczba wejść | 552          |    |
|          |                     |     |                      | 552             | - | 500                  | =            | 52 |

Potrzebujemy teraz odtworzyć stan zapalonych i zgaszonych świateł mając informację o tym, że jesteśmy w stanie 52 wejścia od stanu „0”.

Musimy tak rozłożyć zapalone i zgaszone światła by suma liczb reprezentujących poszczególne „zapalone” piętra wyniosła 54.

Wybieramy w tym celu największą liczbę reprezentującą piętro, która mieści się w sumie 54.

Jest to 32. Do 52 brakuje 20. Dalej wybieramy kolejną największą liczbę reprezentującą piętro, która mieści się w 20. Jest to 16. Do uzyskania 52 brakuje już tylko 4. Wybieramy więc 4.

$$52 = 32 + 16 + 4$$

|          |                      | stan początkowy |
|----------|----------------------|-----------------|
| piętro 9 |                      |                 |
| piętro 8 |                      |                 |
| piętro 7 |                      |                 |
| piętro 6 |                      |                 |
| piętro 5 |                      | 32              |
| piętro 4 |                      | 16              |
| piętro 3 |                      |                 |
| piętro 2 |                      | 4               |
| piętro 1 |                      |                 |
| parter   |                      |                 |
|          | łącznie liczba wejść | 52              |

Z sumy tej odczytujemy, że w stanie 52 wejścia od stanu „0” światła paliły się na 2, 4 i 5 piętrze.

Odpowiedź więc brzmi: **PRAWDA**, światło na 4 piętrze było zapalone zanim zaczął zabawę.

### 3.4.2 Jeśli przed rozpoczęciem zabawy na ósmym piętrze paliło się światło, a na szóstym było zgaszone to Jaś musiał wejść do budynku ponad 52 razy.

Przyjrzyjmy się schematowi świateł na początku i na końcu zabawy. Co do stanu końcowego, nie mamy potrzeby prowadzenia dodatkowych wyliczeń – z poprzednich obliczeń wiemy, że reprezentująca go liczba to 552.

Znamy ustawienie świateł na 6 i 8 piętrze stanu początkowego. Nie znamy ustawień świateł na pozostałych piętrach.

|          | stan początkowy | stan końcowy |
|----------|-----------------|--------------|
| piętro 9 | 512             | 512          |
| piętro 8 | 256             |              |
| piętro 7 | 128             |              |
| piętro 6 |                 |              |
| piętro 5 | 32              | 32           |
| piętro 4 | 16              |              |
| piętro 3 | 8               | 8            |
| piętro 2 | 4               |              |
| piętro 1 | 2               |              |
| parter   | 1               |              |
|          |                 | razem 552    |

Zastanówmy się nad stanem 9 piętra. Czy w stanie początkowym mogło być zapalone światło na 9 piętrze? Jeśli tak by było, to w stanie początkowym zapalone byłyby światła na 8 i 9 piętrze, a w stanie końcowym zapalone było by światło na 9 piętrze, a na 8 zgaszone. Nie jest to możliwe, bo stan 8 i 9 piętro zapalone jest PO stanie 8- zgaszone, 9- zapalone. Więc wiemy, że światło na 9 piętrze w stanie początkowym było zgaszone.

|          | stan początkowy | stan końcowy |
|----------|-----------------|--------------|
| piętro 9 |                 | 512          |
| piętro 8 | 256             |              |
| piętro 7 | 128             |              |
| piętro 6 |                 |              |
| piętro 5 | 32              | 32           |
| piętro 4 | 16              |              |
| piętro 3 | 8               | 8            |
| piętro 2 | 4               |              |
| piętro 1 | 2               |              |
| parter   | 1               |              |
|          |                 | razem 552    |

Nadal możliwości stanów początkowych jest wiele. Jedyne co wiemy, to jak są ustawione światła na 6, 8 i 9 piętrze. Na wszystkich pozostałych mogą być światła zapalone lub zgaszone, w dowolnej konfiguracji.

Rozpatrzmy więc najwcześniejszy stan początkowy z możliwych (czyli z najmniejszą reprezentującą go liczbą) i najdalszy stan początkowy z możliwych (czyli z największą reprezentującą go liczbą).

Najwcześniejszy możliwy stan początkowy będzie, gdy wszystkie nieokreślone piętra będą miały zgaszone światło (stan świateł określony jest na piętrach 6, 8 i 9). Jak widać na rysunku reprezentowany jest przez liczbę 256.

|          | najwcześniejszy<br>z możliwych | najdalszy<br>z możliwych |              |
|----------|--------------------------------|--------------------------|--------------|
|          | stan początkowy                | stan początkowy          | stan końcowy |
| piętro 9 |                                |                          | 512          |
| piętro 8 | 256                            | 256                      |              |
| piętro 7 |                                | 128                      |              |
| piętro 6 |                                |                          |              |
| piętro 5 |                                | 32                       | 32           |
| piętro 4 |                                | 16                       |              |
| piętro 3 |                                | 8                        | 8            |
| piętro 2 |                                | 4                        |              |
| piętro 1 |                                | 2                        |              |
| parter   |                                | 1                        |              |
|          | razem 256                      | razem 447                | razem 552    |

Najdalszy możliwy stan początkowy będzie, gdy wszystkie nieokreślone piętra będą miały światło zapalone. Jak widać na rysunku reprezentowany jest przez liczbę 447.

Ile więc potrzeba minimalnie wejść do budynku by dojść do stanu końcowego? Co najmniej tyle ile potrzeba wejść od najdalszego z możliwych stanu początkowego do stanu końcowego. Jest to więc  $552 - 447 = 105$ . W związku z tym, **PRAWDA** jest że potrzeba więcej niż 52 wejścia.

### 3.4.3 Jeśli na początku zabawy paliło się światło na parterze, to Jaś mógł wbiec parzystą liczbę razy.

Przyjrzyjmy się możliwym stanom początkowym. Każdy z nich będzie miał zapalone światło na parterze i zapalone lub zgaszone światło na pozostałych kondygnacjach. Liczba reprezentująca stan z włączonym światłem na parterze będzie nieparzysta, bo będzie sumą 1 i liczb reprezentujących piętra z zapalonym światłem, które są dla pięter od 1 do 9 parzyste.

Stąd różnica 552 i liczby nieparzystej będzie nieparzysta, więc odpowiedź brzmi **FAŁSZ**, ponieważ Jaś wbiegł nieparzystą liczbę razy.

|          | stan początkowy | stan końcowy |
|----------|-----------------|--------------|
| piętro 9 | 512             | 512          |
| piętro 8 | 265             |              |
| piętro 7 | 128             |              |
| piętro 6 | 64              |              |
| piętro 5 | 32              | 32           |
| piętro 4 | 16              |              |
| piętro 3 | 8               | 8            |
| piętro 2 | 4               |              |
| piętro 1 | 2               |              |
| parter   | 1               |              |
| razem    | nieparzysta     | razem 552    |

### 3.4.4 Możliwe jest, że na początku zabawy było zapalonych 6 światel.

**PRAWDA.** Słowo „możliwe” oznacza, że wystarczy wskazać jeden taki stan, żeby zdanie było prawdziwe. Jest wiele układów, w których mogło być zapalonych 6 światel, na przykład układ zaprezentowany jako stan początkowy na rysunku obok.

|          | stan początkowy | stan końcowy |
|----------|-----------------|--------------|
| piętro 9 |                 | 512          |
| piętro 8 |                 |              |
| piętro 7 |                 |              |
| piętro 6 |                 |              |
| piętro 5 | 32              | 32           |
| piętro 4 | 16              |              |
| piętro 3 | 8               | 8            |
| piętro 2 | 4               |              |
| piętro 1 | 2               |              |
| parter   | 1               |              |
| razem    | 63              | razem 552    |

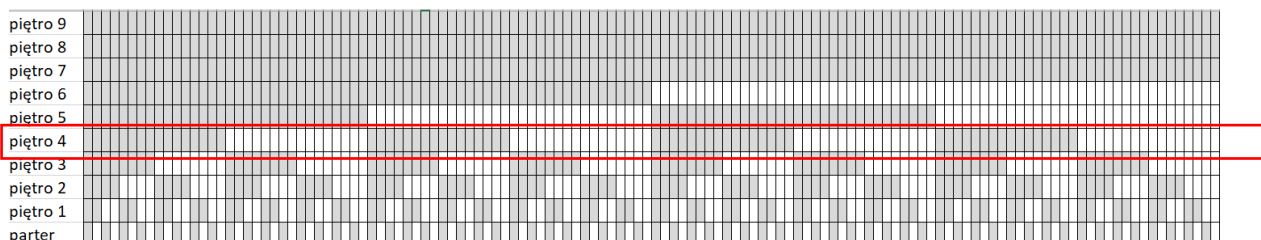
## Pytanie 3.5.

Na początku zabawy na parterze i czwartym piętrze pali się światło, na siódmym jest zgaszone. Nie wiemy jak jest na pozostałych piętrach.

### 3.5.1 Jeśli Jaś wejdzie do budynku 15 razy, to światło na czwartym piętrze na pewno będzie zgaszone.

#### PRAWDA

Zauważmy, że cykl długości zapalonego światła na 4 piętrze wynosi 16, podobnie cykl zgaszonego światła.



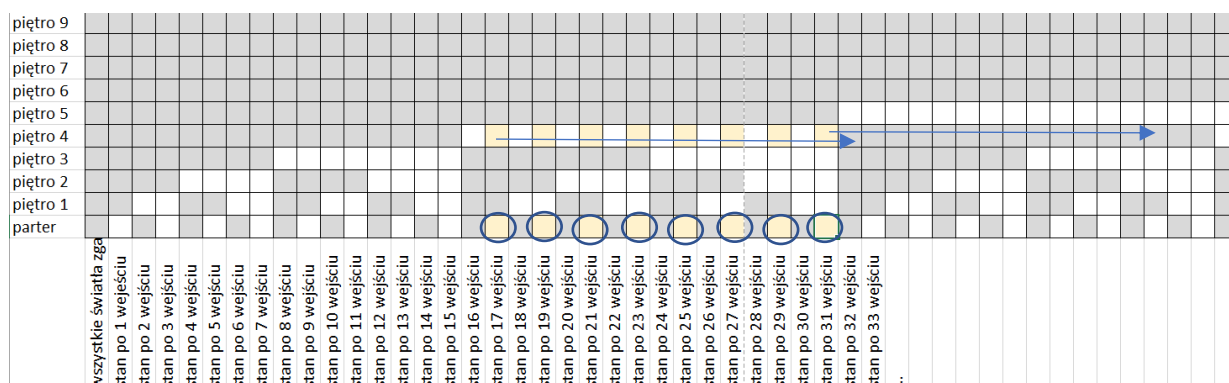
To jaki będzie stan końcowy oczywiście zależy od tego, jaki jest stan początkowy. Wiemy, że przesuwamy się o 15 stanów w prawo. Co wiemy o stanie początkowym?

1. Zapalone jest światło na 4 piętrze,
2. Zapalone jest światło na 1 piętrze,
3. Zgaszone jest światło na 7 piętrze,
4. O stanach światel na pozostałych piętrach nic nie wiemy.

Ponieważ pytanie dotyczy tego, czy na pewno zgaszone jest światło na 4 piętrze, będziemy analizować przesunięcie stanu właśnie patrząc na 4 piętro. Ponieważ schemat zapalonych i zgaszonych światel powtarza się w cyklu 32, możemy skupić się na pierwszym takim cyklu od stanu 0.

Z punktu 1 wynika, że jesteśmy na pasku białych pól 4 piętra, to jest stanach reprezentowanych przez liczby od 16 do 31.

Z punktu 2 wynika, że możemy być w stanach, w których poza zapalonym światłem na 4 piętrze jest również zapalone światło na 1 piętrze, oznaczonych żółtymi kwadracikami.



Ze stanu najwcześniejszego, reprezentowanego przez 17 po przesunięciu o 15 trafiamy w stan 32, ze stanu najdalszego, reprezentowanego przez 31 trafiamy w stan 42. Ze stanów pomiędzy 17 a 31 trafiamy w stany pomiędzy 32 a 42. We wszystkich tych stanach światło na 4 piętrze jest zgaszone.



Rozważania na temat pytań **3.5.2**, **3.5.3** oraz **3.5.4** pozostawimy Wam 😊 Mamy nadzieję, że rozpisanie tych rozważań będzie dla Was inspirujące. Zachęcamy do przesłania nam pełnych rozwiązań z omówieniem na adres [instalogik@instalogik.pl](mailto:instalogik@instalogik.pl) do 30 stycznia 2020. Najlepsze z nich opublikujemy na stronie konkursu.

**3.5.2 Jeśli Jaś wejdzie do budynku 15 razy, to światło na piątym piętrze na pewno będzie zapalone.**

FAŁSZ.

**3.5.3 Jeśli Jaś wejdzie do budynku 111 razy, to światło na siódmym piętrze na pewno będzie zapalone.**

PRAWDA.

**3.5.4 Jeśli Jaś wejdzie do budynku 400 razy, to światło na siódmym piętrze na pewno będzie zapalone.**

FAŁSZ.

### Model sytemu binarnego

Oczywiście wszystkie zadania można było rozwiązywać w oparciu o model systemu binarnego. Stany wejść do budynku można było reprezentować jako liczby binarne, a reprezentującą go liczbę wejść od stanu zero rozważać jako równoważną jej liczbę w systemie dziesiętnym. Każdy kolejny stan powstaje przez zwiększenie o 1 liczby reprezentującej stan, zarówno tej w systemie dziesiętnym (nr wejścia do budynku) jak i tej w systemie binarnym (reprezentowanym przez zapalone „1” światła i zgaszone „0” światła).

Na kolejnej stronie znajduje się skrótowy klucz odpowiedzi z ogólnymi wskazówkami do rozważań nad rozwiązaniami, który opublikowany został na stronie [instalogik.pl](http://instalogik.pl).

## Światelka

Odpowiedzi na pytania zamknięte/numeryczne:

|           | Zadanie | Odpowiedź |
|-----------|---------|-----------|
| Klasy 4-8 | 3.1.1   | Fałsz     |
|           | 3.1.2   | Prawda    |
|           | 3.1.3   | Prawda    |
|           | 3.1.4   | Fałsz     |
|           | 3.2.1   | Prawda    |
|           | 3.2.2   | Fałsz     |
|           | 3.2.3   | Prawda    |
|           | 3.2.4   | Fałsz     |
|           | 3.3.1   | Fałsz     |
|           | 3.3.2   | Prawda    |
|           | 3.3.3   | Fałsz     |
|           | 3.3.4   | Prawda    |
| Klasy 7-8 | 3.4.1   | Prawda    |
|           | 3.4.2   | Prawda    |
|           | 3.4.3   | Fałsz     |
|           | 3.4.4   | Prawda    |
|           | 3.5.1   | Prawda    |
|           | 3.5.2   | Fałsz     |
|           | 3.5.3   | Prawda    |
|           | 3.5.4   | Fałsz     |

### Omówienie

Do poprawnego rozwiązania zadania światelka wymagane było znalezienie sposobu, w jaki działa włączanie świateł w opisanym przypadku. W pierwszych zadaniach metoda bazująca na ręcznej symulacji poszczególnych wejść do budynku pozwalała znaleźć odpowiednie rozwiązanie w dość krótkim czasie. Oczywiście należało pamiętać o sposobie, w jaki Jaś zapala światła i dokładnie sprawdzać jak potoczy się jego zabawa. W zadaniach dla klas 7-8 rozwiązanie bazujące na rozpatrywaniu poszczególnych wejść do budynku przestawało się już sprawdzać, ze względu na dużo większą liczbę pięter, na które wbiega Jaś. W związku z tym należało poszukać ogólnej, matematycznej zasady działania opisanego zabawy. Ważne spostrzeżenie, od którego można było zacząć, zostało opisane poniżej.

Pierwsze uogólnienie, to potraktowanie parteru jako piętra o numerze 0. W ten sposób całe pozostałe rozumowanie można zastosować do wszystkich pięter i parteru łącznie. Rozważmy przypadek, w którym światło nie pali się nigdzie. Zastanówmy się ile razy należy wejść do budynku, aby zapalić światło na poszczególnych piętrach.

- Ile razy trzeba wejść do budynku, aby zapalić światło na 0 piętrze (parterze)?  
Łatwo sprawdzić, że w takiej sytuacji należy wejść do budynku tylko raz, ponieważ interesujące nas piętro będzie pierwszym, na które trafi Jaś.
- Ile razy trzeba wejść do budynku, aby zapalić światło na 1 piętrze?

Możemy to sprawdzić, symulując kolejne wejścia. Po pierwszym wejściu światło będzie zapalone tylko na piętrze 0. Po drugim wejściu będzie zapalone tylko na piętrze 1. Tak więc potrzeba wejść 2 razy.

- Ile razy trzeba wejść do budynku, aby zapalić światło na 2 piętrze?  
Zastosujmy metodę jak powyżej. Wiemy jak będą wyglądać dwa pierwsze wejścia, opisane powyżej. Po trzecim wejściu światło zapalone będzie na 0 i 1 piętrze. Po czwartym wejściu zapalone będzie tylko na 2 piętrze.
- Ile razy trzeba wejść do budynku, aby zapalić światło na 3 piętrze?

- Ile razy trzeba wejść do budynku, aby zapalić światło na 3 piętrze?

Stosując dalej metodę jak powyżej dojdziemy do wniosku, że po siedmiu wejściach do budynku światło będzie zapalone na 0, 1 i 2 piętrze. Po ósmym wejściu zapalone będzie z kolei tylko na 3 piętrze. Na tym etapie można zauważyć, że znaleziona zależność jest w rzeczywistości opisem systemu binarnego.

Rozwiązanie zadania i sposób działania można opisać również nie wiedząc, że jest to system binarny, ale analogia do niego upraszcza dalszą pracę, ponieważ zasady zapalania świateł korzystają z tych samych mechanizmów co operacje na liczbach binarnych. Dla porządku, poniżej tabelka z odkrytą zależnością „Ile razy należy wejść do budynku by zaczynając od stanu, w którym wszystkie światła są zgaszone zapalić po raz pierwszy światło na podanym piętrze”:

| Piętro | Liczba wejść |
|--------|--------------|
| 0      | 1            |
| 1      | 2            |
| 2      | 4            |
| 3      | 8            |
| 4      | 16           |
| 5      | 32           |
| 6      | 64           |
| 7      | 128          |
| 8      | 256          |
| 9      | 512          |

Dalej można zauważyć, że jeśli światło zostałoby zapalone przy pewnym wejściu do budynku, to zgaśnie po tylu wejściach ile podane jest w tabeli, a zostanie ponownie zapalone za dwa razy tyle wejść co podane w tabeli.

Zainteresowani uczniowie mogą sięgnąć do informacji o zapisie liczby w systemie dwójkowym, co nie było wymagane do poprawnego rozwiązania zadania. Układ zapalonych i zgaszonych światełek można interpretować jako ilustrację zapisu liczby w systemie dwójkowym. Każde wejście do budynku generuje liczbę o 1 większą niż poprzednio. Interpretując zadanie w ten sposób można rozważać dalsze pytania. Ustalenie ile wejść wymagane jest w danej sytuacji wymaga zazwyczaj znalezienia minimalnej / maksymalnej liczby binarnej, odpowiadającej zapisanym w zadaniu warunkom, a następnie wykonania dodawania lub odejmowania.